Fysikk og kjemi MEK1100 - Øving 1

Ole Kristian Aamot

31. januar 2020

1.39

(a)
Bruker enhetsvektorene $\vec{i}$ og $\vec{j}$ til å beskrive vektoren $\vec{C}$ hvor $\vec{C}$ = 3.00 $\vec{A}$ - 4.00 $\vec{B}$
$\vec{A} = \vec{A}_x\ \vec{i} + \vec{A}_y\ \vec{j} + \vec{A}_z\ \vec{k}$
$\vec{B} = \vec{B}_x\ \vec{i} + \vec{B}_y\ \vec{j} + \vec{B}_z\ \vec{k}$
$\vec{C}$ = 3.00 $(\vec{A}_x\ \vec{i} + \vec{A}_y\ \vec{j} + \vec{A}_z\ \vec{k})$ - 4.00 $(\vec{B}_x\ \vec{i} + \vec{B}_y\ \vec{j} + \vec{B}_z\ \vec{k})$
$\vec{C}$ = 3.00 $(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$ - 4.00 $(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$
$\vec{C}$ = (3.00 $\vec{i}$ - 4.00 $\vec{i}$) + (3.00 $\vec{j}$ - 4.00 $\vec{j}$) + (3.00 $\vec{k}$ - 4.00 $\vec{k}$)
$\vec{C}$ = -1.00 $\vec{i}$ - 1.00 $\vec{j}$ - 1.00 $\vec{k}$
$|\vec{C}| = \sqrt{C_x^2 + C_y^2 + C_z^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{3}$

1.45

Finner vinkelen mellom hvert av disse parene av vektorer

(a)
$\vec{A}$ = -2.00$\vec{i}$ + 6.00$\vec{j}$ og $\vec{B}$ = 2.00$\vec{i}$-3.00$\vec{j}$
$\vec{A}$ = -2.00$(\vec{A}_x\vec{i})$ + 6.00$(\vec{A}_y\vec{j})$ + 0.00$(\vec{A}_z\vec{k})$
$\vec{B}$ = 2.00$(\vec{B}_x\vec{i})$ - 3.00$(\vec{B}_y\vec{j})$ + 0.00$(\vec{B}_z\vec{k})$
$|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} = \sqrt{(-2.00)^2 + (6.00)^2 + (0.00)^2} = 2\sqrt{10}$
$|\vec{B}| = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2} = \sqrt{(2.00)^2 + (-3.00)^2 + (0.00)^2} = \sqrt{13}$
$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{A}_x\vec{B}_x + \vec{A}_y\vec{B}_y + \vec{A}_z\vec{B}_z$
$\vec{A} \cdot \vec{B} = -2.00 \cdot 2.00 + 6.00 \cdot -3.00 + 0.00 \cdot 0.00 = -4.00 + -18.00 = -22.00$
$\vec{A} \cdot \vec{B} = ABcos(\phi) = |\vec{A}||\vec{B}|cos(\phi)$
$\phi = cos^{-1}(\frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|}) = cos^{-1}(\frac{-22.00}{2\sqrt{10} \cdot \sqrt{13}}) = 164.7°$

(b)
$\vec{A} = 3.00\vec{i} + 5.00\vec{j}$ og $\vec{B} = 10.00\vec{i}+6.00\vec{j}$
$\vec{A} = 3.00(\vec{A}_x\vec{i}) + 5.00(\vec{A}_y\vec{j}) + 0.00(\vec{A}_z\vec{k})$
$\vec{B} = 10.00(\vec{B}_x\vec{i}) + 6.00(\vec{B}_y\vec{j}) + 0.00(\vec{B}_z\vec{k})$
$|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} = \sqrt{(3.00)^2 + (5.00)^2 + (0.00)^2} = \sqrt{34}$
$|\vec{B}| = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2} = \sqrt{(10.00)^2 + (6.00)^2 + (0.00)^2} = 2\sqrt{34}$
$\vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{A}_x\vec{B}_x + \vec{A}_y\vec{B}_y + \vec{A}_z\vec{B}_z$
$\vec{A}\cdot\vec{B} = 3.00\cdot 10.00 + 5.00\cdot 6.00 + 0.00\cdot 0.00 = 30.00 + 30.00 = 60.00$
$\vec{A}\cdot\vec{B} = ABcos(\phi) = |\vec{A}||\vec{B}|cos(\phi)$
$\phi = cos^{-1}(\frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|}) = cos^{-1}(\frac{60.00}{\sqrt{34}\cdot 2\sqrt{34}}) = 28.1°$

(c)
$\vec{A} =$ -4.00$\vec{i} + 2.00\vec{j}$ og $\vec{B} = 7.00\vec{i}+14.00\vec{j}$
$\vec{A} =$ -4.00$(\vec{A}_x\vec{i}) + 2.00(\vec{A}_y\vec{j}) + 0.00(\vec{A}_z\vec{k})$
$\vec{B} = 7.00(\vec{B}_x\vec{i}) + 14.00(\vec{B}_y\vec{j}) + 0.00(\vec{B}_z\vec{k})$
$|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} = \sqrt{(-4.00)^2 + (2.00)^2 + (0.00)^2} = 2\sqrt{5}$
$|\vec{B}| = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2} = \sqrt{(7.00)^2 + (14.00)^2 + (0.00)^2} = 7\sqrt{5}$
$\vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{A}_x\vec{B}_x + \vec{A}_y\vec{B}_y + \vec{A}_z\vec{B}_z$
$\vec{A}\cdot\vec{B} = -4.00\cdot 7.00 + 2.00\cdot 14.00 + 0.00\cdot 0.00 = -28.00 + 28.00 = 0.00$
$\vec{A}\cdot\vec{B} = ABcos(\phi) = |\vec{A}||\vec{B}|cos(\phi)$
$\phi = cos^{-1}(\frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|}) = cos^{-1}(\frac{0.00}{2\sqrt{5}\cdot 7\sqrt{5}}) = 90°$

1.77

Avstanden mellom Karls telt og Joes telt er gitt ved en uløselig vektorligning siden teltkantene ikke kan plasseres geometrisk ved hjelp av informasjonen i oppgaven.

1.85

Vektorene $\vec{A} = 4.9\vec{i} - 6.9\vec{j}$ og $\vec{B} = -3.6\vec{i} + 6.7\vec{j}$ er gitt.
Vektoren $\vec{C}$ er rettvinklet til vektoren $\vec{A}$ og skalarproduktet av $\vec{C}$ med $\vec{B}$ er 10.0.
$|\vec{A}| = \sqrt{(4.9)^2 + (-6.9)^2 + (0)^2} = 8.5$
$|\vec{B}| = \sqrt{(-3.6)^2 + (6.7)^2 + (0)^2} = 7.6$

$\vec{A} \cdot \vec{B} = (4.9)(-3.6)\vec{i} + (-6.9)(6.7)\vec{j} + 0\vec{k}$
$\vec{B} \cdot \vec{C} = -3.6C_x + 6.7C_y + 0C_z = |\vec{B}|\ |\vec{C}|\ cos(\phi) = 10.0$

Komponentene til vektoren $\vec{C}$ er C_x, C_y og C_z og gitt ved

$C_x = A_yB_z - A_zB_y = -6.9 \cdot 0 - 0 \cdot 6.7 = 0$
$C_y = A_zB_x - A_xB_z = 0 \cdot -3.6 - 4.9 \cdot 0 = 0$
$C_z = A_xB_y - A_yB_x = 4.9 \cdot 6.7 - (-6.9) \cdot (-3.6) = 7.99 = 8$

Vektoren $\vec{C}$ er gitt ved komponentene:

$\vec{C} = C_x\vec{i} + C_y\vec{j} + C_z\vec{k} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 8\vec{k} = 8\vec{k}$

Skalarverdien til vektoren $\vec{C}$:

$|\vec{C}| = \sqrt{C_x + C_y + C_z} = \sqrt{(0)^2 + (0)^2 + (8)^2} = 8$

Kontrollregner vektorproduktet mellom $\vec{A}$ og $\vec{C}$ som er 90° rettvinklet:

$\vec{A} \cdot \vec{C} = 4.9\vec{i}C_x + -6.9\vec{j}C_y + 0\vec{k}C_z$
$\vec{A} \cdot \vec{C} = 4.9 \cdot 0 + -6.9 \cdot 0 + 0 \cdot 8 = |\vec{A}|\ |\vec{C}|cos(90) = 8.5 \cdot 8cos(90) = 0$

2.51

(a)
En rakett starter fra ro og beveger seg oppover fra jorden. For de første 10.0 s til bevegelsen er den vertikale akselerasjonen gitt ved $a_y = (3.00\frac{m}{s^2})t$ hvor +y-retningen er oppover. Høyden til raketten over jorda ved $t = 10.0s$ er gitt ved rakettligningen

$$y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_yt^2 \tag{1}$$

$y = 0 + 30\frac{m}{s} \cdot 10.0s + \frac{1}{2}3.00\frac{m}{s^2} \cdot (10.0s)^2 = 300m + 150m = 450m$

(b)
Hastigheten til raketten når den er 285 m over jorda er gitt ved ligningen

$$v_y^2 = v_{0y}^2 + 2a_y(y - 285m) = v_{0y}^2 + 2(3.00\frac{m}{s^2})(y - 285m) \tag{2}$$

$v_y^2 = (30\frac{m}{s} \cdot 10s)^2 + 2 \cdot (3.00\frac{m}{s^2})(450m - 285m)$
$v_y = \sqrt{300\frac{m^2}{s^4} + 6 \cdot 1290\frac{m^2}{s^4}} = 90\frac{m}{s}$

2.53

Akselerasjonen til en motorsykkel er gitt ved $a_x(t) = At - Bt^2$ hvor $A = 1.50\frac{m}{s^3}$ og $B = 0.120\frac{m}{s^4}$.
Motorsykkelen er i ro ved utgangspunktet ved tiden $t = 0$.
(a) Hastighet og posisjon som funksjoner av tid:
$v_x(t) = v_{0x} + \int_0^t a_x dt = 0 + \int_0^t a_x dt = \frac{1}{2}At^2 - \frac{1}{3}Bt^3 = \frac{1}{2}(1.50\frac{m}{s^3})t - \frac{1}{2}(0.120\frac{m}{s^4})t^2$
$x(t) = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2 = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}1.50\frac{m}{s^3}t - \frac{1}{2}0.120\frac{m}{s^4}t^2$
(b) Maksimal hastighet

2.55

En sprinter kan vedlikeholde en maksimal akselerasjon i 1.9 sekund og maksimal hastighet er $10\frac{m}{s}$. Etter at han oppnår denne maksimale hastigheten, så blir akselerasjonen $0\frac{m}{s^2}$ og han løper med konstant hastighet. Anta at akselerasjonen er konstant i løpet av de første $1.9s$ av løpet, som starter før de andre og at han løper rettlinjet.

(a) Sprinteren har tilbakelagt avstanden $x(t)$ når han når maksimal hastighet.

$x(t) = x_0 + v_{0x}(\frac{v_x - v_{0x}}{a_x}) + \frac{1}{2}a_x(\frac{v_x - v_{0x}}{a_x})^2$

(b) Gjennomsnittlig fart $v(t)$ for lengdene

(i) 50.0 m: $v(t) = \frac{50.0m}{\Delta ts}$

(ii) 100.0 m: $v(t) = \frac{100.0m}{\Delta ts}$

(iii) 200.0 m: $v(t) = \frac{200.0m}{\Delta ts}$

2.68

Hastigheten til et objekt er målt til $v_x(t) = \alpha - \beta t^2$ hvor $\alpha = 4.00\frac{m}{s}$ og $\beta = 2.00\frac{m}{s^3}$. Ved $t = 0$ er objektet ved $x = 0$.

$v_x(t) = 4.00\frac{m}{s} - 2.00\frac{m}{s^3}t^2$

(a) Beregn objektets posisjon og akselerasjon som funksjon av tid.

$x(t) = x_0 + v_{0x}(\frac{v_x - v_{0x}}{a_x}) + \frac{1}{2}a_x(\frac{v_x - v_{0x}}{a_x})^2 = x_0 + (4.00\frac{m}{s} - 2.00\frac{m}{s^3}t^2) + \frac{1}{2}\frac{v_{2x}-v_{1x}}{t_2-t_1}(\frac{v_{2x}-v_{1x}}{t_2-t_1})^2$
$a(t) = \frac{v_{2x}-v_{1x}}{t_2-t_1}$

(b) Objektets maksimale positive forskyvning fra utgangspunktet er

$\Delta x(t) = x(t) - x_0(t)$

3.43

En testrakett som starter fra utgangspunktet i punktet A er skutt ut ved å aksellerere langs en 200.0 m inklinasjon i $1.48\frac{m}{s^2}$.
Inklinasjonen øke ved 35.0° over horisontalen og i øyeblikket raketten tar av er raketten kun påvirket av gravitasjonskraften (ignorerer luftmotstand).

(a) Maksimal høyde over bakken til raketten er gitt ved

$$y(t) = y_0 + (v_{0y}sin\alpha_0)t - \frac{1}{2}gt^2 = 200.0 + (v_{0y}sin(35))t - \frac{1}{2}9.81\frac{m}{s^2}t^2 \tag{3}$$

(b) Rakettens høyeste horisontale rekkevidde over punktet A er gitt ved $y_{max}(t)$.

3.59

En snøball ruller ned av en låvetak som går nedover i en vinkel på 40 grader. Kanten på taket er 14.0 m over bakken og snøballen har hastighet på 7.00 $\frac{m}{s}$ når det ruller av taket. Ignorerer luftmotstanden.

(a) Snøballen er 19.4 meter fra kanten av låven hvis den ikke møter noe når den faller:

$$x(t) = x_0 + (v_0cos\alpha_0)t = 14.0m + (7.0\frac{m}{s}cos(40))t \tag{4}$$

(b)

Tegner $x(t), y(t), v_x(t)$ og $v_y(t)$ grafer for bevegelsen i (a).

$x(t) = (v_0 cos\alpha_0)t = (7.00\frac{m}{s}cos(40))t$

$y(t) = (v_0 sin\alpha_0)t - \frac{1}{2}gt^2 = (7.00\frac{m}{s}sin(40))t - \frac{1}{2}9.81\frac{m}{s^2}t$

$v_x(t) = (v_0 cos\alpha_0) = (7.00\frac{m}{s}cos(40))t$

$v_y(t) = (v_0 sin\alpha_0) - gt = (7.00\frac{m}{s}sin(40)) - 9.81\frac{m}{s^2}t$

(c)

En mann på 1.9 meter står 4.0 meter fra kanten på låven.

$$y = \sqrt{1.9^2 + 4.0^2} = 4.428 = 4.4m \tag{5}$$

Snøballen berører ikke mannen.

3.65

En 76.0 kg stein ruller horisontalt fra toppen av en vertikal hylle som er 20 m over overflaten til en innsjø.
Toppen av den vertikale forsiden av en dam er lokalisert 100 meter fra foten av klippen, med toppen av damnivået med overflaten av vannet i innsjøen.
Et nivåsøkk er 25 meter under toppen av dammen.
(a)
Minimumshastigheten til steinen når den faller fra klippen slik at den når søkket uten å råke dammen er $v_{min}(t)$.
(b)
Steinen faller i søkket i avstanden $x(t)$ fra foten av dammen.

3.69

Du står i en horisontal avstand på 14.0 meter fra et høyt gjerde som avgrenser eiendommen til din rike onkel. Toppen av gjerdet er $5.00m$ over bakken. Du har festet en viktig melding til en stein som du ønsker å kaste over gjerdet.

Bakken er nivået og bredden til gjerdet er stort nok til å ignoreres. Du kaster steinen fra en høyde på $1.60m$ over bakken og i en vinkel på $56.0°$ over horisontalen.
(a)
Minimal utgangshastighet til steinen når den kastes må være minst $v(t)$ for å gå klar av toppen av gjerdet.
(b)
Basert på initiell hastighet $v(t)$ beregnet i (a) lander steinen med horisontal avstand $x(t)$ forbi gjerdet.