MAT1120 - Obligatorisk oppgave 2 av 2

Ole Kristian Aamot
olekaa@uio.no

21. oktober 2024

Innleveringsinformasjon

Innleveringsfrist: Torsdag 31. oktober 2024, klokken 14:30 i Canvas.

1 Oppgave 1

I denne oppgaven skal vi se på hvordan vi kan bruke lineær algebra til å tilnærme røttene til et polynom. Vi lar $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + t^3$ være et generelt tredjegradspolynom med reelle koeffisienter.

Definerer matrisen:

$$C_p = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix}$$

1.1 a)

Vis at det karakteristiske polynomet $\chi(t) = \det(tI - C_p)$ til C_p er identisk med p.

Løsning:

$$\chi(t) = \det\left(\begin{bmatrix} t & -1 & 0 \\ 0 & t & -1 \\ a_0 & a_1 & t + a_2 \end{bmatrix}\right)$$
$$= t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0 = p(t)$$

Dermed konkluderer vi med at røttene til p sammenfaller med egenverdiene til C_p.

1.2 b)

La λ betegne en egenverdi for C_p. Vis at vektoren

$$v_\lambda = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{bmatrix}$$

er en egenvektor for C_p tilhørende λ.

Løsning:

Vi viser at $C_p v_\lambda = \lambda v_\lambda$:

$$C_p v_\lambda = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \\ \lambda^2 \\ -a_0 - a_1\lambda - a_2\lambda^2 \end{bmatrix}$$

$$= \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{bmatrix}$$

1.3 c)

Begrunn at C_p er diagonaliserbar hvis og bare hvis p har 3 distinkte røtter.

Løsning:

C_p er diagonaliserbar dersom det finnes 3 lineært uavhengige egenvektorer, som skjer når p har 3 distinkte røtter.

1.4 d)

Skriv et program som bruker potensmetoden.

Python-kode:

```
import numpy as np

def power_method(a0, a1, a2, n, x0):
    C = np.array([[0, 1, 0],
                  [0, 0, 1],
                  [-a0, -a1, -a2]])
    x = np.array(x0)

    for _ in range(n):
        x = np.dot(C, x)
        x = x / np.linalg.norm(x)  # Normalisering

    eigenvalue = np.dot(x, np.dot(C, x)) / np.dot(x, x)
    return eigenvalue, x

# Eksempelkjøring
a0, a1, a2 = -1, -2, 1
n = 100
x0 = [1, 1, 1]
eigenvalue, vector = power_method(a0, a1, a2, n, x0)
print(f"Egenverdi: {eigenvalue}, Egenvektor: {vector}")
```

2 Oppgave 2

La $V = C([-\pi, \pi])$ være vektorrommet av kontinuerlige funksjoner. La $W = \text{span}\{g, h\}$ der $g(t) = e^t \sin t$ og $h(t) = e^t \cos t$.

2.1 a)

Vis at $\{g, h\}$ er en basis for W.

Løsning:

$$g(0) = 0, \quad h(0) = 1 \quad \Rightarrow \text{De er lineært uavhengige.}$$

2.2 b)

Vis at om $f \in W$ så er $f' \in W$.

Løsning:

$$f' = c_1 g' + c_2 h' \quad \text{der } g' = e^t(\sin t + \cos t) \text{ og } h' = e^t(-\sin t + \cos t).$$

Finn matriserepresentasjonen A.

$$A = \begin{bmatrix} g'(0) & h'(0) \\ g(0) & h(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.3 c)

Vis at T er invertibel.

Løsning:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \text{Inversen er } A^{-1}.$$

Antideriverte av g og h:

$$\int e^t \sin t \, dt \quad \text{og} \quad \int e^t \cos t \, dt$$

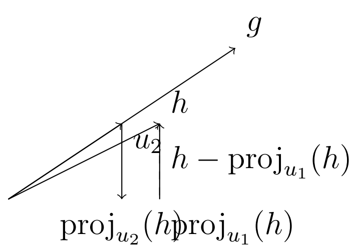
2.4 d)

Bruk Gram–Schmidt-prosessen.

Løsning:

- Start med g og h.
- Normaliser g for å få u_1.
- Subtraher projeksjonen av h på u_1 fra h for å få u_2.
- Normaliser u_2 for å få u_2.

Skisse av Gram-Schmidt-prosessen:



2.5 e)

Beregn projeksjonen av $h(t) = e^{-t}$ ned på underrommet W.

Løsning:

Projeksjon $P_W(h)$ kan beregnes med

$$P_W(h) = \frac{\langle h, g \rangle}{\langle g, g \rangle} g + \frac{\langle h, h \rangle}{\langle h, h \rangle} h.$$

Beregn $\langle h, g \rangle$ og $\langle g, g \rangle$.