MAT2400, Vår 2025
Øvelse 1

Ole Aamot

20. februar 2025

Oppgave 1

(a) Vis at P er tellbar.

La P_n være mengden av alle polynomer av grad n med rasjonale koeffisienter:

$$P_n = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, \quad a_i \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Hver koeffisient a_i kommer fra den tellbare mengden $\mathbb{Q}$, og derfor er produktmengden $\mathbb{Q}^{n+1}$ tellbar. Da en tellbar union av tellbare mengder fortsatt er tellbar, følger det at P er tellbar.

(b) Vis at A er tellbar.

Mengden av algebraiske tall A er mengden av røtter til polynomer i P. Hvert polynom har høyst n røtter, og unionen av disse røttene over en tellbar mengde polynomer er tellbar. Derfor er A tellbar.

(c) Feil i beviset for utellbarhet av $A \cap [0, 1]$.

Beviset bruker en diagonaliseringsmetode, men feilen ligger i antakelsen om at det konstruerte tallet a er algebraisk. Faktisk kan et slikt konstruert tall være transcendent, og derfor ikke tilhøre A, hvilket bryter argumentet.

Oppgave 2

(a) Vis at $f''(z) \geq 0$ for $z \in \mathbb{R}$ impliserer at f er konveks.

Vi bruker Taylors formel av grad 1 med restledd:

$$f(y) = f(x) + f'(x)(y - x) + \frac{1}{2} f''(\xi)(y - x)^2, \quad \xi \in [x, y].$$

Siden $f''(\xi) \geq 0$, følger det at $f(y) \geq f(x) + f'(x)(y - x)$, som viser at f er konveks.

(b) Bevis av Youngs ulikhet.

Vi bruker at e^x er konveks, slik at $e^x \geq 1 + x$ for alle x. Ved å sette $x = ap$ og $y = bq$ får vi at

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q},$$

noe som beviser ulikheten.

(c) Vis at $\ell^1 \subseteq \ell^p$ for $p \geq 1$.

Dersom $x \in \ell^1$, så er $\sum |x_i| < \infty$. Siden $|x_i|^p \leq |x_i|$ for $p \geq 1$, følger det at $\sum |x_i|^p < \infty$, og dermed er $x \in \ell^p$.

(d) Bevis av Hölders ulikhet.

Vi antar først at $\|x\|_p = \|y\|_q = 1$. Da følger det av Youngs ulikhet at

$$|x \cdot y| = \sum |x_i y_i| \leq \sum \left(\frac{|x_i|^p}{p} + \frac{|y_i|^q}{q} \right) = 1.$$

Generelt følger ulikheten ved å normalisere x og y.

(e) Vis trekantulikheten for d_p.

Vi må vise at

$$d_p(x, z) \leq d_p(x, y) + d_p(y, z).$$

Ved å bruke Minkowskis ulikhet får vi

$$\left(\sum |x_i - z_i|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum |x_i - y_i|^p \right)^{1/p} + \left(\sum |y_i - z_i|^p \right)^{1/p},$$

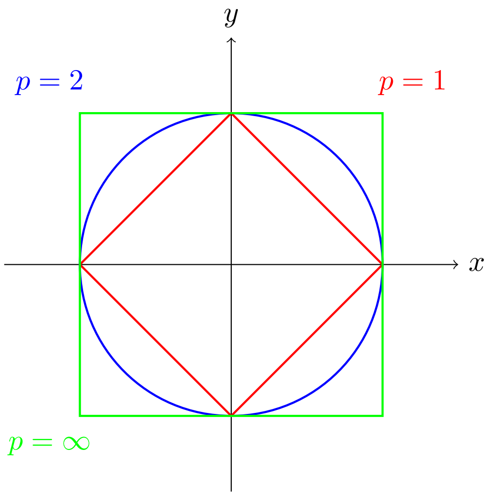
som fullfører beviset.

(f) Vis at d_∞ er en metrikk og at $\lim_{p \to \infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$.

Metrikkegenskapene følger av definisjonen. Grenseverdien følger ved å merke seg at

$$\|x\|_p = \left(\sum |x_i|^p \right)^{1/p} \to \sup |x_i| = \|x\|_\infty.$$

(g) Skisser av enhetskulen for $p = 1, 2, \infty$.



Enhetskulen for $p = 1$ er en rombe, for $p = 2$ en sirkel, og for $p = \infty$ et kvadrat.